Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, 06-04-04, 9-12, Examenhal.

X (1) Toon aan dat de substitutie $v = \log y$ de differentiaalvergelijking $y' + P(x)y\log y + Q(x)y = 0$ omzet in een lineaire differentiaalvergelijking. Los hiermee op: $xy' + 2y\log y - 4x^2y = 0,\ y(1) = 1$.

X (2) Toon aan dat $(7x^3 + 3x^2y + 4y)dx + (4x^3 + x + 5y)dy$ niet exact is. Bewijs, door berekening, dat door vermenigvuldiging met een geschikte funktie van de vorm $\phi(x + y)$ een exacte vorm verkregen wordt. Los ten slotte de differentiaalvergelijking op. Hint: $4x^3 + x + 5y = 4x^3 - 4x + 5(x + y)$.

X (3) Toon aan dat voor elke $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ er precies één oplossing is van het beginwaardeprobleem: $y' = \sqrt{x^2 + y^2},\ y(x_0) = y_0$, en dat de oplossing gedefiniëerd is op het hele interval $(-\infty, \infty)$. Welke stelling(en) gebruikt u?

(4) Teken het fase portret van het autonome stelsel $x' = 2y,\ y' = -xe^{-x}$. Wat is het stationaire punt? Is dat stabiel? Hint: Bereken de differentiaalvergelijking van y als funktie van x en los die op.

X (5) Bepaal alle oplossingen van $y''' - y'' + y' - y = 4\sin x$.

X (6) Leid de formule af voor de algemene oplossing van het eerste orde stelsel $y' = A(x)y + b(x)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ in termen van de bekend veronderstelde fundamentaalmatrix $F(x)$ voor $y' = A(x)y$.

X (7) Bereken een fundamentaalmatrix voor $y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y$.

X (8) L is de differentiaaloperator gegeven door $Ly = x^2y'' + 2xy' - 2y$.
(a) Vind een basis van de oplossingen door Lx^λ te berekenen.
(b) Bewijs dat voor elke continue functie $f : [1, 2] \to \mathbf{R}$ er een unieke oplossing z van $Lz = f$ bestaat met $z(1) = z(2) = 0$.
(c) Geef de formule voor de funktie van Green voor L en het segment $[1, 2]$.
(d) Geef de formule voor z uit (b) in termen van de funktie van Green.

X (9) L is de differentiaaloperator $x^2(\frac{d}{dx})^2 + x^3\frac{d}{dx} + x^4$.
(a) Bereken de geadjungeerde L^* van L ten opzichte van de Dirichlet randvoorwaarden en het gewone inproduct voor funkties op het segment $[a, b]$, d.w.z. gegeven door $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
(b) L is de differentiaaloperator $-(\frac{d}{dx})^2 + 4$ werkend op de ruimte V van de C^2-funkties $v : [0, 1] \to \mathbf{R}$ die voldoen aan $v(0) = v(1) = 0$. Bereken de eigenwaarden van L, d.w.z. de λ waarvoor er een $v \in V$ is met $v \neq 0$ en $Lv = \lambda v$.